О.В. Чалий, Я.В. Цехмістер, К.О. Чалий

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА МЕДИКО–БІОЛОГІЧНИХ ДАНИХ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

З МОДУЛЯ № 1 ДИСЦИПЛІНИ
“МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА”

КИЇВ - 2011

УДК 517:[61+57](075.8)
ББК 22.1я7
К Ч16

Автори:

Чалий Олександр Васильович - доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії педагогічних наук України, Заслужений діяч науки і техніки України, професор, завідувач кафедри медичної і біологічної фізики НМУ імені О.О.Богомольця.

Цехмістер Ярослав Володимирович - доктор педагогічних наук, проректор з науково-педагогічної роботи та довузівської підготовки НМУ імені О.О.Богомольця, Заслужений працівник освіти України, директор Українського медичного ліцею НМУ імені О.О.Богомольця, професор кафедри медичної і біологічної фізики НМУ імені О.О.Богомольця.

Чалий Кирило Олександрович - доктор фізико-математичних наук, Ph.D. в інженерії, начальник відділу комп'ютерних технологій навчання та дистанційної освіти НМУ імені О.О.Богомольця, професор кафедри медичної і біологічної фізики НМУ імені О.О.Богомольця.

Чалий О.В., Цехмістер Я.В., Чалий К.О.

К Ч16 Математична обробка медико–біологічних даних. Навчальний посібник з модуля № 1 дисципліни "Медична і біологічна фізика". –К.: Вид-во НВП "Інтерсервіс", 2011. – 64 с.

ISBN 978-966-2465-48-8

Навчальний посібник «Математична обробка медико–біологічних даних» для студентів НМУ імені О.О.Богомольця містить програму відповідних розділів курсу математики, необхідний теоретичний матеріал, приклади розв'язування задач, завдання до самостійної роботи. Матеріал навчального посібника узгоджений з програмою дисципліни "Медична і біологічна фізика".

Навчальний посібник є корисним для підготовки студентів до складання підсумкового модульного контролю.

ВСТУП

За допомогою даного навчального посібника студенти мають змогу підготуватися до складання підсумкового модульного контролю з модуля № 1 «Математична обробка медико–біологічних даних» дисципліни "Медична і біологічна фізика". Посібник «Математична обробка медико–біологічних даних» містить програму відповідних розділів модуля, необхідний теоретичний матеріал, приклади розв'язування задач, завдання до самостійної роботи. Список рекомендованої літератури, що наведений у посібнику, дозволяє студентам більш глибоко ознайомитися з основними положеннями щодо основ математичного аналізу та основ теорії ймовірності та математичної статистики.

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА (витяг)
З ДИСЦИПЛІНИ "МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА"

Програма з медичної і біологічної фізики приведена у відповідність до нормативних документів МОН та МОЗ України щодо реалізації положень Болонської декларації в системі вищої медичної і фармацевтичної освіти. Згідно з навчальним планом вивчення медичної і біологічної фізики студентами першого курсу здійснюється в I або в II семестрах. Програма структурована на модулі, змістовні модулі, теми відповідно до вимог "Рекомендацій щодо розроблення навчальних програм навчальних дисциплін" (наказ МОЗ України від 12.10.2004 р. № 492).

Медична і біологічна фізика як навчальна дисципліна:

- інтегрується з такими дисциплінами як медична хімія, медична біологія та ін.;
- закладає основи вивчення студентами нормальної фізіології, біонеорганічної, фізико-колоїдної та біоорганічної хімії, біостатистики, гістології. патологічної фізіології, радіаційної медицини, загальної гігієни, кардіології, офтальмології, отоларингології та ін.

Програму дисципліни "Медична і біологічна фізика" поділено на 3 модулі:

Модуль 1. Математична обробка медико–біологічних даних

Модуль 2. Основи медичної фізики

Модуль 3. Основи біофізики

Засвоєння теми (поточний контроль) контролюється на практичних заняттях відповідно до конкретних цілей. Засвоєння змістових модулів (**проміжний контроль**) – на практичних підсумкових заняттях. Для цього використовуються такі засоби діагностики рівня підготовки студентів: розв'язування задач, комп'ютерні тести, проведення лабораторних досліджень з трактуванням та оцінкою їх результатів, контроль практичних навичок. **Підсумковий контроль** засвоєння модулів здійснюється по їх завершенню на підсумкових контрольних заняттях.

У результаті вивчення дисципліни "Медична і біологічна фізика" студенти повинні знати:

- основи вищої математики, теорії ймовірності, математичної статистики;

- загальні фізичні та біофізичні закономірності, що лежать в основі процесів, які відбуваються в організмі людини;
- характеристики фізичних зовнішніх факторів, що впливають на організм людини, та біофізичні механізми цих впливів;
- призначення та принципи роботи електронної медичної апаратури, техніку безпеки при роботі з нею.

ВИТЯГ З ПРОГРАМИ ДИСЦИПЛІНИ
"МЕДИЧНА І БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА"

МОДУЛЬ 1
МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА МЕДИКО–БІОЛОГІЧНИХ ДАНИХ

Змістовий модуль 1. Основи математичного аналізу

Тема 1. Основи диференціального числення.

Диференціал функції однієї змінної. Частинні похідні і диференціали функції двох і більше змінних. Повний диференціал.

Тема 2. Основи інтегрального числення.

Невизначений і визначений інтеграли. Інтегрування методом заміни змінної та частинами.

Тема 3. Поняття про диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними та зі змінними, що розділяються. Лінійні, однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Конкретні цілі вивчення змістового модуля 1:
• Трактувати поняття диференціалу, частинних похідних, повного диференціалу; • Застосовувати диференціали у наближених обчисленнях; • Пояснювати математичні основи методів інтегрування невизначених та визначених інтегралів; • Трактувати поняття диференційних рівнянь; • Пояснювати методи розв'язку диференційних рівнянь 1–го та 2–го порядку.

Змістовий модуль 2. Основи теорії ймовірності та математичної статистики

Тема 4. Елементи теорії ймовірності.

Ймовірність випадкової події. Теореми додавання і множення ймовірностей.

Тема 5. Елементи математичної статистики.

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Закони розподілу випадкових величин. Довірчі ймовірності та довірчі інтервали. Функціональна і кореляційна залежності. Рівняння регресії. Коефіцієнт кореляції.

Конкретні цілі вивчення змістового модуля 2:
• Трактувати поняття ймовірності випадкової події; • Засвоїти теореми додавання та множення ймовірностей; • Трактувати поняття математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення; • Застосовувати закони розподілу випадкових величин.

ВИБРАНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ
ЩОДО ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ № 1
«ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ»

Тема 1. Основи диференціального числення	• Диференціал функції однієї змінної. • Частинні похідні і диференціали функції двох і більше змінних. • Повний диференціал.

Похідна функції, її геометричний та механічний зміст

Похідною y' від визначеної та неперервної в околі деякої точки x_0 функції $y=f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу нескінченно малий ($\Delta x \to 0$), тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована, то згідно з означенням похідної її приріст Δy можна подати у вигляді граничного значення y' і нескінченно малої величини α, яка містить Δx і зникає при $\Delta x \to 0$, тобто

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x.$$

Головна частина приросту функції Δy, що дорівнює добутку похідної y' на приріст аргументу Δx, називається диференціалом функції dy:

$$dy = y'\Delta x.$$

Можна сказати, що **диференціал** dy – це лінійна частина приросту функції, оскільки добуток $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – величина нелінійна відносно Δx.

Диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту $dx = \Delta x$.

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = y'dx.$$

Геометричний зміст похідної функції полягає в тому, що значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута α нахилу дотичної до графіку функції в даній точці, тобто $y'=\mathrm{tg}\alpha$.

Іншими словами, значення похідної y' в точці x_0 є кутовим коефіцієнтом рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0, y_0, а саме рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Поняття похідної може отримати **механічний зміст** при розгляді миттєвої швидкості υ нерівномірного руху, обчислення якої здійснюється за формулою

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'.$$

Миттєва швидкість υ є похідною від переміщення S по часу t.

Таблиця похідних деяких елементарних функцій

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$	8.	$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$	9.	$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3.	$(e^x)' = e^x$	10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	12.	$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	13.	$(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$		

Правила обчислення похідних

Якщо c – деяка константа, а $u=u(x)$ та $v=v(x)$ – деякі диференційовані функції незалежної змінної x, то справедливі наступні правила:

1) $(c)' = 0$
2) $(x)' = 1$
3) $(cu)' = cu'$
4) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5) $(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \qquad (v\neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'}{v^2} \qquad (v\neq 0)$

Похідна складеної функції

Нехай функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y=f(u)$ - в точці $u_0=u(x_0)$. Тоді складена функція $y=f[u(x)]$ також має похідну в точці x_0 і при цьому

$$y'(x_0) = f'_u(u_0)\cdot u'_x(x_0).$$

Дослідження функції за допомогою похідної

Інтервали зростання та спадання функції називаються її інтервалами монотонності.

Точка x_0 називається **точкою максимуму** функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, в якому виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ при $x\neq x_0$, і **точкою мінімуму**, якщо в деякому її околі $f(x) > f(x_0)$ при $x\neq x_0$.

Точки максимуму та мінімуму функції називаються її **точками екстремуму**.

Умовою монотонності функції є наступне. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна та диференційована на інтервалі $(a;b)$, тобто $a\le x\le b$. Тоді якщо $f'(x)>0$ для всіх $x\in(a,b)$, то функція зростає на зазначеному інтервалі, а якщо $f'(x)<0$ для всіх $x\in(a,b)$, то функція спадає на зазначеному інтервалі.

Необхідна умова існування екстремуму є наступне. Якщо диференційована в деякому інтервалі $(a;b)$ функція має в точці $x_0\in(a;b)$ екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.

Достатня умова існування екстремуму є наступне. Якщо похідна функції $f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 і при переході через цю точку в напрямку зростання x змінює знак "плюс" ("мінус") на "мінус" ("плюс"), то в точці x_0 ця функція має максимум (мінімум). Якщо ж похідна функції при переході через точку x_0 не змінює знака, то в цій точці екстремум функції $f(x)$ відсутній.

Побудова графіків функцій

Повне дослідження функції для побудови її графіку включає наступні пункти (наведений порядок може змінюватись):

1. Дослідження області визначення функції, інтервалу неперервності, точок розриву.
2. Перевірка функції на парність і періодичність.
3. Визначення точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Визначення асимптот графіка функції.
5. Визначення інтервалів монотонності та точки екстремуму.
6. Визначення інтервалів опуклості, угнутості та точок перегину.

За отриманими даними будується графік функції.

Частинні похідні і диференціали функції декількох змінних

Розглядатимемо функцію двох незалежних змінних $z = f(x, t)$. Зафіксуємо $t = t_0$, тоді z – функція лише однієї змінної x. Її приріст Δz дорівнює:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, t_0) - f(x_0, t_0).$$

Утворимо відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ та знайдемо границю цього відношення при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, t_0) - f(x_0, t_0)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x,t).$$

Ця величина називається **частинною похідною** від функції $z = f(x, t)$ за змінною x у точці (x_0, t_0). Відповідно, частинна похідна за змінною t у цій точці дорівнює:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0, t_0+\Delta t) - f(x_0, t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t} = z'_t(x,t).$$

Будемо вважати, що функція $z = f(x, t)$ має частинну похідну $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в околі деякої точки M. Якщо при цьому існує частинна похідна по t від $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають змішаною частинною похідною в точці M:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Справедливе співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Якщо похідну беруть двічі по одній і тій же змінній, то її позначають:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Повний диференціал

Розглянемо $u = f(x, y, z)$ – функцію трьох незалежних змінних, яка є визначеною і диференційованою у деякому інтервалі.

Головна, лінійна відносно Δx, Δy, Δz, частина приросту функції називається **повним диференціалом** du функції трьох змінних:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Інакше кажучи, повний диференціал функції дорівнює сумі її частинних диференціалів.

Тема 2. Основи інтегрального числення	• Невизначений і визначений інтеграли. • Інтегрування методом заміни змінної та частинами.

Первісна та невизначений інтеграл

Задача інтегрального числення полягає в знаходженні функції $F(x)$ за її похідною $F'(x) = f(x)$ чи за її диференціалом $f(x)dx$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** чи інтегралом для даної функції $f(x)$, якщо для всіх x з області визначення функції виконуються рівності $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$ має безмежну кількість первісних, що відрізняються тільки на сталу величину C. Тому, якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то будь–яка інша може бути представлена виразом $F(x) + C$.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$.

Символ невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$. Згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $\int$ – знак інтегралу, x – змінна інтегрування.

Обчислення інтегралу від заданої функції називається інтегруванням даної функції.

Таблиця деяких невизначених інтегралів

1.	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$\int dx = x + c$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c, \quad x \neq 0$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

6.	$\int e^x dx = e^x + c$
7.	$\int \sin dx = -\cos x + c$
8.	$\int \cos x dx = \sin x + c$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c, \ x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...$
11.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + c = -arcctg\,x + c$
12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c, \quad -1 < x < 1$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
15.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\vert \frac{x-a}{x+a} \right\vert + c, \ \vert x \vert \neq a, \ a \neq 0$
16.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\vert \frac{x+a}{x-a} \right\vert + c, \ \vert x \vert \neq a, \ a \neq 0$
17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln \left\vert x + \sqrt{x^2 \pm k} \right\vert + c, \ \vert x \vert > \sqrt{\vert k \vert}$

Означення визначеного інтеграла

Нехай у функції $f(x)$, яка визначена на деякому проміжку X, існує в цьому проміжку X невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in X, \ C = const.$$

Нехай a і b – дві довільні точки, що належать проміжку X. Різниця $F(b) - F(a)$ представляє собою приріст первісної $F(x)$ при переході з точки a в точку b. Приріст $F(b) - F(a)$ довільної первісної $F(x)$ функції $f(x)$ при зміні аргументу x від значення a до значення b називають **визначеним інтегралом** з границями інтегрування a и b , що позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx$$

Задача обчислення визначеного інтеграла зводиться до знаходження первісної (тобто невизначеного інтеграла), після чого потрібно обчислити значення первісної при $x = b$ і $x = a$ та знайти різницю цих значень:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big\vert_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Цей вираз називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Властивості визначеного інтеграла

1. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від доданків:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Якщо відрізок інтегрування $[a,b]$ розбитий на дві частини $[a,c]$ і $[c,b]$, так що $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. **Теорема про середнє**. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то у межах $[a,b]$ існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Геометричний зміст цієї теореми: **площу криволінійної трапеції** можна виразити через площу прямокутника з тією ж основою, що й трапеція, і стороною, яка дорівнює значенню підінтегральної функції при деякому проміжному значенні аргументу.

5. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Цю властивість легко зрозуміти, якщо скористатись теоремою про середнє та взяти до уваги, що $(b-a) = -(a-b)$.

Крім цього можна навести інші властивості визначеного інтегралу:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, якщо $f(-x) = -f(x)$

3. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_0^a f(x)dx$, якщо $f(-x) = f(x)$

4. Якщо $f(x) \ge 0$ всюди на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

5. Якщо $f(x) \le g(x)$ всюди на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

7. Якщо M і m – максимальне та мінімальне значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$, то

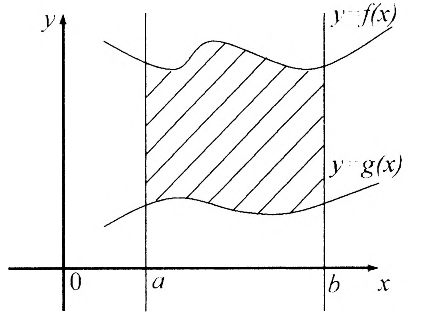
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об'ємів

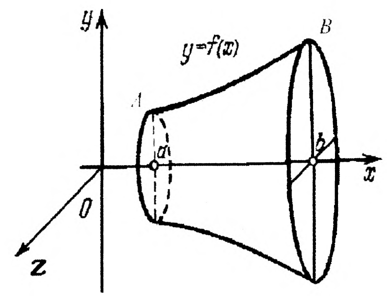
Якщо, наприклад, є дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, які неперервні на інтервалі $[a,b]$, то **обчислення площі** S плоскої фігури, обмеженої зверху графіком функції $y = f(x)$, а знизу - графіком функції $y = g(x)$, зліва - прямою $x = a$, справа - прямою $x = b$ може бути проведене за формулою:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

В даному випадку це означає, що площу плоскої фігури можна обчислити як різницю площ двох криволінійних трапецій, утворених відповідно двома функціями $y = f(x)$ і $y = g(x)$.



Якщо, наприклад, є функція $y = f(x)$, яка неперервні на інтервалі $[a,b]$, і утворена нею криволінійна трапеція $aABb$ обертається навколо вісі OX утворюючи об'ємне тіло обертання, то **обчислення об'єму** V цього тіла можна провести наступним чином:



(а) визначаємо, що поперечний перетин цього тіла (в довільній точці x) площиною, яка перпендикулярна до осі Ox, є коло, радіус R якого дорівнює значенню функції $f(x)$ в точці x;

(б) з цього випливає, що площа $S(x)$ поперечного перерізу визначається виразом

$$S(x) = \pi R^2 = \pi(f(x))^2;$$

(в) знаючи площі поперечних перетинів $S(x)$, можна знайти об'єм тіло обертання за формулою

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Основні методи інтегрування

1. **Безпосереднє інтегрування** – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць без додаткових перетворень.

2. **Метод розкладання**. Метод базується на розкладанні підінтегральної функції на суму функцій, кожна з яких є табличною.

3. **Інтегрування підстановкою (заміна змінної)**.

Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ робиться заміна змінної $x = f(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x. Диференціал $dx = f'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл переписується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко береться.

4. **Інтегрування частинами**. Розглянемо дві неперервні (диференційовані) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Утворимо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Звідси

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Таким чином, інтеграл $\int udv$ зводиться до інтеграла $\int vdu$, який часто береться більш просто.

Тема 3. Поняття про диференціальні рівняння	• Диференціальні рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються. • Лінійні, однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами. • Методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Поняття про диференціальні рівняння

Диференціальним називається рівняння, в яке, крім функції y і незалежної змінної x, входять похідні функції y', y'', ..., $y^{(n)}$ (або диференціали dx і dy). Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ або } F_2(x, y, dx, dy) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають **порядком** диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо невідома функція y та її похідні y', y'', ... входять у рівняння тільки в першому ступені. В іншому випадку – рівняння нелінійне.

Розв'язком звичайного диференціального рівняння n-го порядку називається кожна функція $y = f(x)$, підстановка якої, разом з її похідними, перетворює його в тотожність. Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння.

У випадку функції однієї змінної ($y = f(x)$) рівняння називають **звичайним** диференціальним рівнянням. У випадку двох ($y = f(x_1, x_2)$) і більше змінних рівняння називають диференціальним рівнянням **в частинних похідних**.

Лінійні диференціальні рівняння

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\cdot y = b(x),$$

де y – шукана функція, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ – відомі функції незалежної змінної, їх ще називають коефіцієнтами диференціального рівняння. Якщо коефіцієнти при невідомій функції y та її похідних не залежать від x, тобто є константами, то рівняння називається диференціальним рівнянням з **постійними**

коефіцієнтами. У протилежному випадку – диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Рівняння, в якому $b(x) \neq 0$, називається **неоднорідним**, якщо ж $b(x) = 0$, то рівняння – **однорідне**.

У відповідність однорідному диференціальному рівнянню можна поставити алгебраїчне рівняння відносно змінної λ

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

яке називають **характеристичним** для даного диференціального рівняння. Якщо λ – корінь характеристичного рівняння, то $y = e^{\lambda x}$ – розв'язок диференціального рівняння. Кожному дійсному кореню кратності m відповідає набір лінійно незалежних розв'язків

$$y = e^{\lambda x},\ y = xe^{\lambda x}, \ldots,\ y = x^m e^{\lambda x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, який є лінійною комбінацією незалежних розв'язків:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i,$$

де C_1, C_2, ..., C_n – довільні константи, y_i – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння . Розв'язок, який отримується із загального при деяких фіксованих значеннях констант C_1, C_2, ..., C_n, називають **частинним розв'язком**.

Лініїні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має загальний вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y).$$

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$y = f(x) + C,$$

де C – деяка константа. Такий розв'язок ще називають загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку. Загальний інтеграл з визначеним

числовим значенням константи C називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння.

Диференціальні рівняння зі змінними, що розділяються

У рівнянні $y' = f(x, y)$ запишемо y' через відношення диференціалів $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Такому рівнянню можна надати вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Припустимо, що $M(x, y)$ та $N(x, y)$ можна подати добутками:

$$M(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),\ N(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y),$$

в яких співмножники залежать лише від однієї змінної. Тоді

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Рівняння можна інтегрувати. Цю процедуру називають розділенням змінних. Загальний інтеграл такого рівняння має вигляд:

$$F_1(x) + F_2(y) = C,$$

де F_1 та F_2 – первісні для функцій $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ та $\dfrac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}$ відповідно.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Звичайне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний вигляд неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де $f(x)$ – доданок, вільний від невідомої функції. Якщо $f(x)=0$, то

$$y''+py'+qy=0$$

– однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Будемо шукати розв'язок у вигляді $y=e^{\lambda x}$, де λ – деяка константа. Перша та друга похідні: $y'=\lambda e^{\lambda x}$; $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$. Підставляємо в рівняння та отримуємо

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0\,.$$

Відповідно маємо **характеристичне рівняння** для даного однорідного

$$\lambda^2+p\lambda+q=0\,.$$

Це алгебраїчне рівняння є квадратним, де корені:

$$\lambda_{1.2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Залежно від знака дискримінанта можливі три варіанти:

1) $\dfrac{p^2}{4}-q>0$. В цьому випадку обидва корені різні й існує два лінійно незалежні розв'язки: $y_1=e^{\lambda_1 x}$ і $y_2=e^{\lambda_2 x}$. Загальний розв'язок (загальний інтеграл) має вигляд:

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x},$$

де C_1 і C_2 – постійні коефіцієнти.

2) $\dfrac{p^2}{4}-q=0$. У такому випадку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ – кратний корінь. Частинні розв'язки вибираються у вигляді: $y_1=e^{\lambda x}$ та $y_2=xe^{\lambda x}$. Загальний розв'язок:

$$y=C_1e^{\lambda x}+xC_2e^{\lambda x}.$$

3) Останній із випадків є найбільш складний і найбільш цікавий водночас. При $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ коренями є комплексні спряжені числа

$$\lambda_{1.2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\alpha\pm i\beta\,,$$

де $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця, $\alpha=-\dfrac{p}{2}$ – дійсна частина, $i\beta=i\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ – уявна частина комплексного числа.

Частинні розв'язки диференціального рівняння мають вигляд:

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

В перетворенні була використана формула Ейлера

$$e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm\sin\beta x\,.$$

Дві незалежні лінійні комбінації цих розв'язків складаються таким чином:

$$\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad \frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

Загальний розв'язок можна подати у вигляді:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Загальний розв'язок можна подати в іншому еквівалентному вигляді записавши константи $C_1=A\cos\varphi_0$, $C_2=-A\sin\varphi_0$. Тоді матимемо:

$$y=Ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi_0),$$

де A та φ_0 – дві незалежні константи.

ВИБРАНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ № 2 «ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ»

Тема 4. Елементи теорії ймовірності	• Ймовірність випадкової події. • Теореми додавання і множення ймовірностей.

Випробування — це реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подією називається результат експерименту або спостереження, який при реалізації даного комплексу умов може відбутися або не відбутися. Подія є результатом випробування.

Існує **класифікація подій**. Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається **достовірною**.

Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається **неможливою**.

Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається **випадковою**.

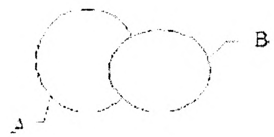
Випадкові події називають **залежними**, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась інша подія чи ні. У протилежнім випадку події називаються **незалежними**.

Випадкові події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному експерименті.

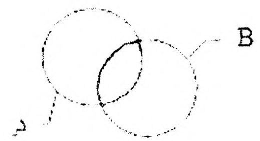
Випадкові події називають **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших.

В теорії ймовірності вводяться **поняття операцій** додавання, множення та віднімання подій.

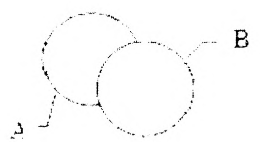
При додаванні подій, **сумою подій** A і B називається така подія C=A+B (C=A∪B), яка полягає у появі подій A або B. Операція A∪B ще називається **об'єднанням подій** A і B.



При множенні подій, **добутком подій** A і B називається така подія C=AB (C=A∩B), яка настає з одночасним настанням подій A і B. Операція A∩B називається **перетином подій** A і B:



При відніманні подій, **різницею подій** A і B називається така подія C=A-B (C=A\B), яка настає з настанням події A і одночасним настанням події B.



Ймовірність - число з інтервалу [0, 1], що є виміром шансу випадкового явища.

Ймовірність $P(A)$ випадкового явища виражається співвідношенням кількості результатів, які сприяють певному явищу, до загальної кількості всіх можливих явищ у певному випадковому експерименті:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – загальна кількість однаково можливих і несумісних подій, які утворюють повну групу, m – число елементарних подій, які сприяють події A. Це класичне визначення ймовірності для випадкових експериментів зі скінченною кількістю явищ з однаковою ймовірністю.

Ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність

$$0\le P(A)\le 1,$$

причому ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а достовірної – одиниці.

Теорема додавання ймовірностей

Ймовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей кожної події окремо, тобто

$$P\ (A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Якщо в результаті досліду обов'язково повинна реалізуватись одна із подій A_1, A_2, ..., A_n і ніяка інша подія реалізуватись не може, то говорять, що ці події утворюють **повну групу**.

Якщо для деякої події A сприятливими є всі n випадків, котрі утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність такої події:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Дві події A і $\overline{A}$ називаються **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють повну групу. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Ймовірность об'єднання двох випадкових сумісних подій:

$$P\ (A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ і } A_2),$$

де $P(A_1 \text{ і } A_2)$ – ймовірність перетину подій A_1 і A_2.

Теорема множення ймовірностей

Ймовірність перетину (добутку) двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \text{ і } A_2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2).$$

Для залежних подій користуються поняттям **умовної ймовірності** $P_A(B)$ – ймовірності реалізації події B за умови, що подія A відбулася.

Ймовірність перетину (добутку) двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності $P(A)$ реалізації події A, на умовну ймовірність $P_A(B)$ реалізації події B за умови, що подія A вже реалізувалася:

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B).$$

Тема 5. Елементи математичної статистики	• Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. • Закони розподілу випадкових величин. • Довірчі ймовірності та довірчі інтервали. • Функціональна і кореляційна залежності. • Рівняння регресії. • Коефіцієнт кореляції.

Математичною статистикою називається розділ математики, що вивчає методи обробки даних досліджень, що отримуються в результаті спостережень над випадковими явищами.

Методи математичної статистики безпосередньо пов'язані з імовірнісними оцінками усереднених результатів серій випробувань. Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей.

Статистичні характеристики рядів даних

Важливими характеристиками випадкової величини є усереднені значення, а саме: середнє арифметичне спостережених значень, мода, медіана, а також показник розсіювання (варіації) спостережених значень випадкової величини – розмах вибірки.

Середнє арифметичне спостережених значень обчислюється за формулою:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

де n – кількість спостережень, в яких досліджувана випадкова величина X набуває одного із своїх можливих значень x_i (i=1,2,3,...).

Мода – це значення випадкової величини, яке найчастіше зустрічається у вибірці. Таких значень може бути декілька.

Медіана – це значення змінюваної ознаки, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень випадкової величини більша від медіани, а друга - менша.

Розмах вибірки дорівнює різниці між максимальним і мінімальним значеннями сукупності спостережених значень і є найпростішою характеристикою розсіювання спостережених значень.

Розмах вибірки не можна вважати задовільною оцінкою розсіювання, оскільки він залежить тільки від двох крайніх значень варіаційного ряду і не враховує статистичні ймовірності проміжних варіант і особливості розподілу статистичних ймовірностей.

Основні кількісні характеристики розподілу випадкових величин

Математичне сподівання або **середнє значення** випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \ldots + P_n X_n.$$

Якщо всі випадкові події рівноймовірні, тобто $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1/n$, де n – повне число випадкових подій, то в цьому окремому випадку математичне сподівання зводиться до середнього арифметичного:

$$M(X) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Математичне сподівання має такі властивості:

(а) $M(C) = C$, де C – стала.

(б) $M(CX) = CM(X)$.

(в) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

(г) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X і Y – незалежні випадкові величини.

2. **Дисперсія $D(X)$** випадкової величини X

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсія – це математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання. Інший вираз для дисперсії має вигляд

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Дисперсія – це різниця математичного сподівання квадрата випадкової величини і квадрата математичного сподівання цієї величини.

Дисперсія має такі властивості:

(а) $D(C) = 0$, де C – стала.

(б) $D(CX) = C^2 D(X)$.

(в) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, де X і Y – незалежні випадкові величини.

Для характеристики відхилення не середнього квадрата, а самої випадкової величини вводиться поняття середнього квадратичного відхилення σ.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ пов'язане з дисперсією формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Видно, що розмірність σ збігається з розмірністю самої випадкової величини X.

Перестановки, розміщення, комбінації

Розглянемо **розділ комбінаторики**, що вирішує окремі задачі, пов'язані з аналізом різних комбінацій елементів множин. Залежно від правил утворення виділяють три типи комбінацій: перестановки, розміщення, сполучення.

Для введення відповідних означень використовують поняття факторіалу. Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають ***n*-факторіалом** і пишуть:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Вважають, що $0! = 1$ і $n \in N$.

Основна властивість факторіала: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Перестановка n елементів множини A без повторень – це розміщення по n елементів, тобто послідовність елементів множини A, що має довжину n і попарно різні члени.

Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = n!.$$

Упорядковані k-елементні підмножини множини, що містять n елементів, називаються **розміщеннями** з n по k. Число розміщень з n по k дорівнює

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Цю формулу можна записати також у факторіальній формі

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Основні властивості розміщень:

1) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$;

2) $A_n^n = P_n = n!$.

Сполученнями називаються всі можливі комбінації з n елементів по m, які відрізняються друг від друга принаймні хоча б одним елементом *(m, $n \in N$ і $n \geq m$)*.

У загальному випадку число сполучень із n елементів по m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, що поділене на число перестановок з m елементів: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Цю формулу можна записати також у факторіальній формі

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!},$$

використовуючи відповідні факторіальні формули для числа розміщень $A_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ і перестановок $P_n = n!$.

Основні властивості сполучень:

1) $C_n^{n-m} = \dfrac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$;

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Біном Ньютона

Біном Ньютона – це вираз вигляду $(a+b)^n$.

Біном розкладається в суму одночленів, які є добутками ряду ступенів його доданків a і b.

Формули розкладу бінома Ньютона в многочлен із степенями n=2 та 3:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

В загальному випадку розклад бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Основні закони розподілу випадкових величин

Біноміальним розподілом називають *дискретний* ймовірнісний розподіл, що характеризує кількість позитивних результатів в послідовності експериментів, значення яких змінюється за принципом «так/ні», кожен з яких набуває позитивного результату з ймовірністю P.

Біноміальний розподіл ймовірності того, що подія A реалізується m разів у серії з n випробувань, визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де p – ймовірність появи події A в одному досліді; $q = 1 - p$ – ймовірність того, що подія A не з'явиться в одному досліді; C_n^m – число можливих комбінацій із n елементів по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Розподілом Пуассона називають розподіл ймовірностей, які визначаються формулою Пуассона. Для визначення ймовірності того, що подія, ймовірність якої мала ($p < 0.1$), відбудеться m разів у серії з n випробувань (n – достатньо велике), використовують формулу Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$ – середнє значення числа випадків, в яких реалізується дана подія.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Закон розподілу *неперервної* випадкової величини x називається нормальним, якщо щільність розподілу дорівнює:

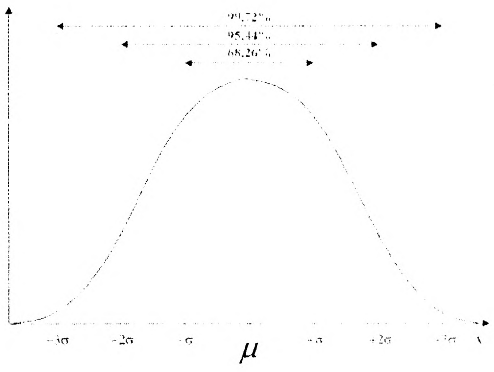
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де параметр μ – середнє значення (математичне сподівання) випадкової величини x; параметр μ вказує абсцису, координату по вісі OX, максимуму кривої щільності розподілу; $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ - вказує ординату, координату по вісі OY, максимуму кривої щільності розподілу; σ – середнє квадратичне відхилення.

Нормальний розподіл з параметрами $\mu = 0$ та $\sigma = 1$ називають нормованим, а формула для щільності розподілу в такому випадку набуває виду

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Графік розподілу Гауса описується симетричною відносно μ кривою:



Довірчі ймовірності та довірчі інтервали.

Інтервал $(a;b)$, що містить невідомий параметр θ із заданою ймовірністю β, називають **довірчим інтервалом**, що відповідає **довірчій ймовірності** β. Верхня та нижня границі інтервалу $(a;b)$, що покриває з заданою імовірністю β невідомий параметр θ, називаються **довірчими границями**. Цьому відповідає формула:

$$P(a<\theta<b)=\beta.$$

При достатньо великих вибірках (при n>30-40), довірчий інтервал $(a;b)$ обирається симетричним відносно параметру θ, тобто $(\theta-\Delta;\ \theta+\Delta)$, а найбільше відхилення Δ вибіркової середньої, від генеральної середньої, яке можна задати з довірчою ймовірністю β, називається **граничною похибкою вибірки**.

Кореляція та регресія

Ознака, що характеризує наслідок, називається **результативною**, а та, що характеризує фактор (умову або причину), **- факторною**.

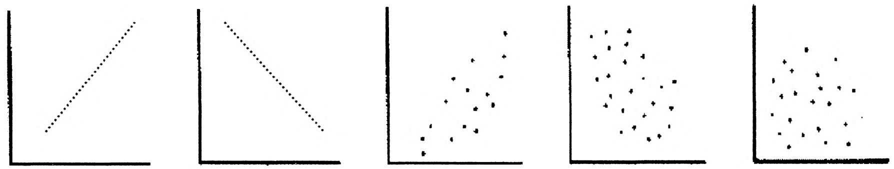
Функціональний зв'язок передбачає, що певному значенню факторної ознаки завжди відповідає одне або кілька значень результативної ознаки. Функціональні зв'язки можна описати математичною формулою та задати таблично, графічно або вербально.

Кореляційний зв'язок проявляється, коли кожному значенню ознаки X відповідає певна множина ознаки Y, які варіюють і утворюють ряд розподілу. Кореляційний аналіз дозволяє оцінити щільність зв'язку між ознаками, описати невідомі причинні зв'язки і визначити фактори, що мають найбільший вплив на результативну ознаку.

Для характеристики кореляційного зв'язку між випадковими величинами використовують **коефіцієнт кореляції** r, який є мірою залежності між цими величинами. Коефіцієнт кореляції r визначається за формулою

$$r=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Коефіцієнт кореляції може варіюватися в межах максимального значення, що дорівнює +1 (повна позитивна кореляція) та мінімального значення –1 (повна негативна кореляція). Якщо випадкові величини не залежать одна від одної (не корелюють між собою), то $r = 0$. Графічний аналіз дозволяє робити наближені висновки щодо значень коефіцієнту кореляції.



$r=1$ $r=-1$ $r=0{,}6$ $r=-0{,}3$ $r=0$

Коли точки на координатній площині розподіляють у формі «хмари», тоді коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною стає меншим за 1, і у випадку округлення форми наближається до 0.

Регресійний аналіз має на меті встановлення форми залежності, визначення функції регресії, використання рівняння регресії для оцінки невідомих значень залежної змінної (результативної ознаки) та їх прогнозування.

Рівняння регресії характеризує зміну середнього рівня результативної ознаки залежно від зміни факторної ознаки.

Найпростіший вид регресії — **лінійна регресія**. В цьому випадку рівняння регресії представлене лінійною функцією $y(x)=b+ax$, яка має графік у вигляді прямої лінії, точки якої максимально наближені до точок, які відповідають значенням результативної ознаки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання №1

Обчислити похідну функції: $y=\dfrac{\sqrt{x}\operatorname{tg}x}{\ln x}$.

Розв'язання:

$$y=\frac{\sqrt{x}\operatorname{tg}x}{\ln x};\ y'=\frac{(\sqrt{x}\operatorname{tg}x)'\ln x-\sqrt{x}\operatorname{tg}x(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\left[\left((x)^{1/2}\right)'\operatorname{tg}x+\sqrt{x}(\operatorname{tg}x)'\right]\ln x-\sqrt{x}\operatorname{tg}x(\ln x)'}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{1}{2}(x)^{1/2-1}\right)\operatorname{tg}x+\sqrt{x}\frac{1}{\cos^2 x}\right]\ln x-\sqrt{x}\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}x+\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}\right]\ln x-\sqrt{x}\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{\left[\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}x+2x\right]\ln x-2\operatorname{tg}x\cdot\cos^2 x}{2\sqrt{x}\cos^2 x\cdot\ln^2 x}=\frac{(\sin 2x+4x)\ln x-2\sin 2x}{4\sqrt{x}\cos^2 x\cdot\ln^2 x}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{(\sin 2x+4x)\ln x-2\sin 2x}{4\sqrt{x}\cos^2 x\ln^2 x}$.

Завдання №2

Обчислити похідну функції: $y=e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x}$.

Розв'язання:

$$y'=\left[e^{3x}\right]'\cdot tg^2\sqrt{x}+e^{3x}\cdot\left[tg^2\sqrt{x}\right]'=3e^{3x}\cdot(3x)'\cdot tg^2\sqrt{x}+e^{3x}\cdot 2tg\sqrt{x}\cdot(tg\sqrt{x})'=$$

$$=3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x}+e^{3x}\cdot 2tg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'=3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x}+2\frac{tg\sqrt{x}\cdot e^{3x}}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $y'=3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x}+2\dfrac{tg\sqrt{x}\cdot e^{3x}}{\cos^2\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Завдання №3

Обчислити похідну функції: $y=\ln(1+3\cos x)\cdot arctg5x$.

Розв'язання:

$$y'=\left[\ln(1+3\cos x)\right]'\cdot arctg5x+\ln(1+\cos 3x)\cdot(arctg5x)'=$$

$$=\frac{-3\sin x\cdot arctg5x}{1+\cos 3x}+\frac{5\ln(1+3\cos x)}{1+25x^2}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{-3\sin x\cdot arctg5x}{1+\cos 3x}+\dfrac{5\ln(1+3\cos x)}{1+25x^2}$.

Завдання №4

Тіло рухається прямолінійно за законом $S = \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + \frac{5t^2}{2}$ (час t від початку руху вимірюється в секундах, шлях S – відстань від початкового пункту у метрах). Визначити моменти часу, коли швидкість тіла дорівнює нулю?

Розв'язання:

Миттєва швидкість точки визначається як $V(t) = S'(t)$, тобто отримуємо $V(t) = t^3 - 6t^2 + 5t$. За умовою, визначаємо моменти часу, коли швидкість дорівнює нулю, тобто $t^3 - 6t^2 + 5t = 0$. З цього рівняння отримуємо: t_1=0 с, t_2=1 с, t_3=5 с.

Відповідь: t_1=0 с, t_2=1 с, t_3=5 с.

Завдання №5

Знайти точки екстремуму й інтервали монотонності функції $y = \frac{x^2+4}{x}$.

Розв'язання:

Функція визначена на всій числовій осі, крім точки x=0.

Знайдемо критичні точки функції через обчислення її похідної $y'(x)$:

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

Похідна не існує в точці x_2=0 і дорівнює нулю в точках x_1=-2, x_3=2, тобто, є три *критичні точки*.

Визначаємо, що перша похідна додатня при $|x| > 2$ і від'ємна при $|x| < 2$. Отже, функція зростає на інтервалах (-∞, -2) і (2, ∞) і спадає на інтервалах (-2, 0) і (0, 2).

При переході через точку x_1=-2 похідна змінює знак "+" на "-", отже, точка x_1=-2 є *точкою максимуму* функції і y_{max}=$y(x_1)$=-4. У разі переходу через точку x_2=0 похідна не змінює свого знака, отже, точка x_2=0 не є точкою екстремуму функції. При переході через точку x_3=2 похідна змінює знак "-" на "+", отже, x_3=2 є *точкою мінімуму* функції і y_{min}=$y(x_3)$=4.

Завдання №6

Обчислити інтеграл: $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = 2\int\sqrt{x}dx + \int 1dx \quad 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + C.$$

Відповідь: $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + C$.

Завдання №7

Обчислити інтеграл: $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int\cos x dx\right) = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

Відповідь: $\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}(x+\sin x) + C$.

Завдання №8

Обчислити інтеграл: $\int ctg^2 x\,dx$.

Розв'язання:

$$\int ctg^2 x\,dx = \int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -ctgx + x + C.$$

Відповідь: $\int ctg^2 x\,dx = -ctgx + x + C$.

Завдання №9

Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx;$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1/2.

Завдання №10

Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^1 xe^{x^2}dx;$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1);.$$

Відповідь: (e-1)/2.

Завдання №11

Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=arctg(x+1)\Big|_{-1}^{0}=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\pi/4$.

Завдання №12

Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$.

Розв'язання:

$$S=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}(\text{кв. од.}).$$

Відповідь: 2/3 (кв. од.).

Завдання №13

Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=-x^2$, $y=e^x$, віссю ординат і прямою $x=1$.

Розв'язання:

$$S=\int\limits_{0}^{1}\left[e^x-(-x^2)\right]dx=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}\ (\text{кв. од.}).$$

Відповідь: e-2/3.

Завдання №14

Множина M утворена з чотирьох букв A, B, C, D. Скласти комбінації з двох букв, що відрізняються друг від друга хоча б одним елементом.

Розв'язання:

Маємо AB, AC, AD, BP, BD, CD. Виходить, що число сполучень з чотирьох елементів по двоє дорівнює 6. Це коротко записується так: $C_4^2=6$.

Відповідь: 6.

Завдання №15

В ящику 10 червоних ґудзиків та 6 синіх. Вийняли два ґудзика. Яка ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору?

Розв'язання:

Загальна кількість ґудзиків: 10 + 6 = 16.

Загальна кількість можливих пар ґудзиків – *комбінація без повторень* з 16 по 2:

$$N(\Omega)=C_{16}^2=\frac{16!}{2!(16-2)!}=\frac{15\cdot 16}{2}=120.$$

Нехай A – подія, що відповідає тому, що обидва ґудзики червоного кольору, B – подія, що відповідає тому, що обидва ґудзики синього кольору. Тоді число можливих пар червоних ґудзиків – комбінація без повторень з 10 по 2:

$$N(A)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45,$$

синіх ґудзиків - комбінація без повторень з 6 по 2:

$$N(B)=C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15.$$

Ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору дорівнює сумі ймовірностей того, що ґудзики будуть червоного та синього кольорів.

Кількість пар ґудзиків одного кольору

$N(A\cup B)=N(A)+N(B)=45+15=60$, а шукана ймовірність:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1/2.

Завдання №16

Статистика результатів складання іспиту є наступною:

Оцінка за іспит	12	10	8	6	4
Кількість учнів, які отримали оцінку	3	4	7	11	2

Визначити значення середньої оцінки та моду.

Розв'язання:

Визначимо середнє арифметичне за формулою:

$$\bar{x}=\frac{12\cdot 3+10\cdot 4+8\cdot 7+6\cdot 11+4\cdot 2}{3+4+7+11+2}=\frac{206}{27}\approx 7{,}6.$$

Найчастіше зустрічається оцінка "6" – це є мода даного ряду.

Відповідь: середня оцінка – "7,6" а мода – "6".

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Кожен з трьох запропонованих варіантів складається з дванадцяти однобальних тестових завдань. Всі завдання мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна є правильною. Необхідно провести розрахунки та визначити, яка саме відповідь є правильною. Бажаємо успіху!

Варіант 1

1. Знайти похідну функції: $y = \ln^5 x$.

А	Б	В	Г	Д
$5\ln^4 x$	$\frac{\ln x}{5x}$	$\frac{5\ln^4 x}{x}$	$\frac{\ln^4 x}{5x}$	$\frac{1}{x^5}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ у точці $x=\pi/4$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = Sin\ x$ в точці $x=\pi$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2(x-\pi)$	$y = 2\pi - x$	$y = 5(x-1)$	$y = x-2$	$y = \pi - x$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^3 - 2t^2 + 2$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент t=2 c.

А	Б	В	Г	Д
5	7	2	4	1

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;\infty)$	$(3;\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;-3)$

6. Укажіть функцію, яка є зростаючою на всій області визначення.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2 + x$	$y = -3x^2$	$y = \frac{5}{x}$	$y = -\sin x$	$y = \sqrt{2x}$

7. Знайдіть первісну функції $y = 3x^2$, яка проходить через точку $M_0\,(1;1)$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	x^3	$x^3 + 5$	$3x^3$	$3x^3 + 1$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx$, $b = \int_{-1}^{0} 2x dx$, $c = \int_{0}^{1} x^3 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < c < a$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$:

А	Б	В	Г	Д
1	4/3	2	5/4	3

10. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7, 9?

А	Б	В	Г	Д
120	100	150	25	125

11. На картках написані числа від 2 до 10. Яка ймовірність того, що добуток чисел на навмання вибраних двох картках буде непарним числом?

А	Б	В	Г	Д
1/2	3/10	5/9	1/9	1/5

12. Задано 15 чисел. Серед них число 9 повторюється 5 разів, число 16 – 4 разів, число 37 – 6 рази. Знайдіть середнє арифметичне заданих чисел.

А	Б	В	Г	Д
22	29	30	27	32

Варіант 2

1. Знайти похідну функції: $y = 3^{\text{tg}x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{tgx3^{\text{tg}x-1}}{\ln x}$	$\frac{3^{\text{tg}x}}{\cos^2 x}$	$\frac{3^{\text{tg}x}\ln 3}{\cos^2 x}$	$3^{\text{tg}x}\ln 3$	$\frac{tgx}{\ln 3}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = (\sin 5x + \cos 5x)^{10}$ у точці $x=\pi/2$.

А	Б	В	Г	Д
-1	5	10	-50	1/2

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = x^2 + 3x + 1$ в точці $x_0=1$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$y = 5x$	$y = 2x + 1$	$y = x + 3$	$y = 3x - 1$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент t=1 c.

А	Б	В	Г	Д
-1/54	-1/7	1/2	1	1/3

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;2)$	$(3;\infty)$	$(2;3)$	$(-2;\infty)$	$(1;5)$

6. Укажіть функцію, яка є спадною на інтервалі $(-\infty;0)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x^2$	$y = 2 + x$	$y = \sqrt{2x}$	$y = -\sin x$	$y = \frac{5}{x}$

7. Знайдіть первісну функції $y = 2e^{2x}$, графік якої проходить через точку M_0 (0;1).

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$\ln 2x$	$2e^x$	e^{2x}	$\frac{e^{2x}}{2x}$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$, $b = \int\limits_{-1}^{0} xdx$, $c = \int\limits_{0}^{1} x^7 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$c < b < a$	$b < c < a$	$a < c < b$	$a < b < c$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = 1 + e^x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 0$:

А	Б	В	Г	Д
e	$4 + e^3$	$4 - e^{-3}$	$1 + e$	e^3

10. Скільки всього різних семицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1,2,3,4,5,6,7?

А	Б	В	Г	Д
120	1020	2000	3040	5040

11. У коробці є 30 кульок, із яких 24 чорного кольору, а решта білого. Визначте ймовірність того, що навмання взята кулька з коробки буде білого кольору.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,9	0,7	0,4	0,2

12. Група із семи абітурієнтів пройшла вступне тестування у ВНЗ. При цьому вони отримали наступні бали (за 200-бальною шкалою): 130, 160, 154, 127, 198, 180, 141. Знайдіть медіану цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
154	127	150	130	200

Варіант 3

1. Знайти похідну функції: $y = \ln\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$-tgx$	$\frac{1}{\cos x}$	tgx	$-Ctgx$	$\frac{1}{\sin x}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = e^{x^3-3x^2-6x}$ у точці $x=1$.

А	Б	В	Г	Д
$3e^{-8}$	$-e^{8}$	$-9e^{-8}$	$-8e^{-8}$	e^{-8}

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = x^2$ в точці $x_0=3$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$y = 6x$	$y = x - 9$	$y = 2x - 3$	$y = 6x - 9$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = 3t^3 + 7$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент $t=10$ c.

А	Б	В	Г	Д
30	300	307	900	907

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{3x-1}{1-4x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1/4) \cup (1/4;\infty)$	$(-1/4;1/4)$	$(-1/4;1/4) \cup (1/4;\infty)$	$(-\infty;1/4)$	$(-\infty;\infty)$

6. Укажіть функцію, яка є зростаючою на інтервалі $(0;\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x^2$	$y = \frac{5}{x}$	$y = \sqrt{2x}$	$y = -\sin x$	$y = 5 - x$

7. Знайдіть первісну функції $y = \cos x$, графік якої проходить через точку M_0 (0;0).

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$\frac{1}{\sin x}$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x dx$, $b = \int_{-1}^{0} 5x dx$, $c = \int_{0}^{1} x^5 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < c < a$	$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < a < c$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$:

А	Б	В	Г	Д
1/2	-4	4	-3	1

10. Скільки всього різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 5, 7, 9?

А	Б	В	Г	Д
5	6	9	10	12

11. У коробці є 24 кульок, із яких 16 чорного кольору, а решта білого. Навмання обирають 2 кульки. Яка ймовірність того, що вони мають різний колір.

А	Б	В	Г	Д
0,23	0,38	0,46	0,61	0,84

12. Чому дорівнює середнє арифметичне ряду цілих чисел від 1 до n, якщо відомо, що $n!=720$?

А	Б	В	Г	Д
3,5	4	6	21	120

ДОВІДКОВІ МАТЕРІАЛИ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Алгебраїчні тотожності та правила

Арифметичні дії	Дії з дробами	Степені та корені
$a + 0 = a$	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$a^0 = 1$
$a + b = b + a$	$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{b \pm a}{ab}$	$a^1 = a$
$a - b = a + (-b)$	$\otimes\ \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a \pm b}$	$a^2 = a \cdot a$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$\frac{c}{a} \pm \frac{d}{b} = \frac{cb \pm ad}{ab}$	$a^3 = a \cdot a \cdot a$
$-(a - b) = -a + b$	$\left(\frac{a \pm b}{c}\right) d = \frac{ad \pm bd}{c}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a \cdot 1 = a$	$\otimes\ \frac{a \pm bd}{cd} \neq \frac{a \pm b}{c}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a : 1 = a$	$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$a \cdot 0 = 0$	$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$a : 0 = \infty$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\otimes\ (a + b)^n \neq a^n + b^n$
$ab = ba$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$(a + b)c = ac + bc$	$\frac{1}{a} : b = \frac{1}{ab}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$(ab)c = a(bc)$	$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1} = \frac{b}{a}$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{a^2} = a$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Арифметичні дії	Дії з дробами	Степені та корені
$\otimes\ (a + b)^2 \neq a^2 + b^2$	$\frac{1}{\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b \pm a}$	$\otimes\ \sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ $\otimes\ \sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$ $a : b = \frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\otimes$ - *застереження щодо можливих помилок*

Перетворення виразів

Якщо, наприклад, є два вирази: $a = b + c$, $d = e + f$, то справедливо наступне:

(1) $a \pm d = (b + c) \pm (e + f)$

(2) $ad = (b + c)(e + f)$

(3) $a/d = (b + c)/(e + f)$

Основні поняття та правила щодо ***наближених обчислень***.

Абсолютною похибкою наближеного значення називається модуль різниці точного й наближеного значень.

Відносною похибкою наближеного значення називається відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.

Правильною цифрою наближеного значення називається цифра будь-якого розряду в тому випадку, коли абсолютна похибка не перевищує одиницю цього розряду.

Значущими цифрами наближеного значення називаються його цифри, крім нулів ліворуч, а також усіх нулів праворуч, які стоять на місцях цифр, що були замінені при округленні.

Правила дій із наближеними значеннями.

- При додаванні й відніманні наближених значень результат необхідно округлити до стількох десяткових знаків, скільки їх має компонент із найменшим числом десяткових знаків.
- При множенні й діленні наближених значень результат необхідно округлити до стількох значущих цифр, скільки їх має компонент із найменшим числом значущих цифр.

Правила округлення дробів

- Якщо при округленні перша із цифр, що була замінена нулем, менша за 5, то остання значуща цифра не змінюється.

• Якщо при округленні перша із цифр, що була замінена нулем, більша або дорівнює 5, то до останньої значущої цифри додається 1.

Пропорцією *називається рівність двох відношень.*

Загальний вигляд пропорції: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Основна властивість пропорції: *якщо* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $ad=bc$.

Інші властивості пропорції: *якщо* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

то $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

Наслідки: $a=\frac{cb}{d}$, $b=\frac{da}{c}$, $c=\frac{da}{b}$ *та* $d=\frac{cb}{a}$.

Якщо $a:b:c=x:y:z$, *то* $a=kx$; $b=ky$; $c=kz$,

де k — *коефіцієнт пропорційності.*

Відсоток — *це* $\frac{1}{100}$ *частина числа.*

Формула для розрахунку *складених відсотків* K на внески:

$$K=a(1+0{,}01\,r)^n,$$

де a - сума внеску; r - значення річних відсотків; n - кількість повних років.

Середнє арифметичне: $a=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Середнє геометричне: $b=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

(за умови існування кореня *n-го* степеня).

Формули розкладання на множники

$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1})$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 та x_2 - корені рівняння

$ax^2+bx+c=0$

Формули скороченого множення

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$,

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

Арифметичним коренем k-го степеня з числа a ($a>0$) називається невід'ємне число b, k-й степінь якого дорівнює a, тобто $\sqrt[k]{a}=b$ та $a=b^k$.

Логарифмом числа x з основою a ($a>0$, $a\neq 1$) називається показник степеня b, до якого треба піднести число a, щоб дістати число x. Тобто якщо $log_a x=b$, то $a^b=x$.

Властивості логарифмів

$a^{log_a x}=x$

$log_a a=1$

$log_a 1=0$

$log_a b=1/(log_b a)$

$log_a xy=log_a x+log_a y$

$log_a x/y=log_a x-log_a y$

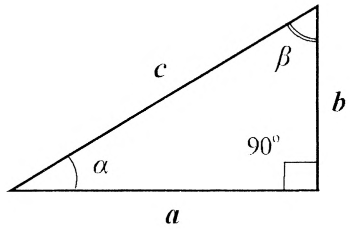
$log_{a^k} x=(1/k)\,log_a x$

$log_a x=(log_c x)/(log_c a)$,

якщо $c>0, c\neq 1$

$log_b x=(log_a x)/(log_a b)$

Тригонометричні функції



$sin\alpha=\frac{b}{c}$, $|\sin\alpha|\leq 1$

$cos\alpha=\frac{a}{c}$, $|\cos\alpha|\leq 1$

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{a}$

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{a}{b}$

Перетворення мір кутів

360° *(градусів)* **= 2π** *(радіан)*

180° = π, 90° = $\pi/2$, ...

$x=2\pi\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$, де x – радіани, α° – градуси.

Деякі константи

$\pi\approx 3{,}14$	$2\pi\approx 6{,}28$	$4\pi\approx 12{,}56$
$\sqrt{2}\approx 1{,}41$	$\sqrt{3}\approx 1{,}73$	

Значення тригонометричних функцій основних кутів

градуси	**0**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
радіани	**0**	**$\pi/6$**	**$\pi/4$**	**$\pi/3$**	**$\pi/2$**	**π**	**$3\pi/2$**
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	–	0

Формули зведення

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\pi/2 \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$

$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$

$tg(\alpha + \pi k) = tg\,\alpha$

$ctg(\alpha + \pi k) = ctg\,\alpha$

Формули складання тригонометричних функцій

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Формули тригонометричних функцій подвійного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = (2tg\alpha)/(1 + tg^2\alpha)$

$tg\,2\alpha = (2\,tg\alpha)/(1 - tg^2\alpha)$

$ctg\,2\alpha = (ctg^2\alpha - 1)/2ctg\alpha$

Формули тригонометричних функцій половинного аргументу

$\sin^2\alpha/2 = (1 - \cos\alpha)/2$

$\cos^2\alpha/2 = (1 + \cos\alpha)/2$

$tg\,\alpha/2 = \sin\alpha/(1 + \cos\alpha) = (1 - \cos\alpha)/\sin\alpha$,

де $\alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$\sin\alpha/2 = \pm((1-\cos\alpha)/2)^{1/2}$

$\cos\alpha/2 = \pm((1+\cos\alpha)/2)^{1/2}$

$tg\,\alpha/2 = \pm((1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha))^{1/2}$

$tg\,\alpha/2 = \sin\alpha/(1+\cos\alpha) = (1-\cos\alpha)/\sin\alpha$

$ctg\,\alpha/2 = \pm((1+\cos\alpha)/(1-\cos\alpha))^{1/2}$

$ctg\,\alpha/2 = \sin\alpha/(1-\cos\alpha) = (1+\cos\alpha)/\sin\alpha$

Формули перетворення суми тригонометричних функцій

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\alpha+\beta)/2\,\cos(\alpha-\beta)/2$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\alpha+\beta)/2\,\sin(\alpha-\beta)/2$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій

$\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2$

$\cos\alpha\cos\beta = (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))/2$

$\sin\alpha\cos\beta = (\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))/2$

Співвідношення між тригонометричними функціями

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$\sin\alpha = (2\,tg\,\alpha/2)/(1 + tg^2\alpha/2)$

$\cos\alpha = (1 - tg^2\,\alpha/2)/(1 + tg^2\alpha/2)$

$\sin^2\alpha = 1/(1 + ctg^2\alpha) = tg^2\alpha/(1 + tg^2\alpha)$

$\cos^2\alpha = 1/(1 + tg^2\alpha) = ctg^2\alpha/(1 + ctg^2\alpha)$

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$

$1 + tg^2\,\alpha = 1/\cos^2\alpha$, де $\alpha \neq \pi(2n+1)/2$

$1 + ctg^2\,\alpha = 1/\sin^2\alpha$, де $\alpha \neq \pi n$

$tg\,\alpha = (2\,tg(\alpha/2))/(1-tg^2(\alpha/2))$

Таблиця взаємозв'язку між тригонометричними функціями

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$\sin\alpha = a$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
$\cos\alpha = a$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
$tg\,\alpha = a$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\dfrac{1}{a}$
$ctg\,\alpha = a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	a

Обернені тригонометричні функції

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2]$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [0;\ \pi]$

$arctg(tg\,\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2]$

$arcctg(ctg\,\alpha) = \alpha$, де $\alpha \in [0;\ \pi]$

$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha - 2\pi k$, де $\alpha \in [-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$

$\arcsin(\sin\alpha) = (2k+1)\pi - \alpha$, де $\alpha \in [\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$

$\arccos(\cos\alpha) = \alpha - 2\pi k$, де $\alpha \in [2\pi k; (2k+1)\pi]$

$\arccos(\cos\alpha) = 2\pi k - \alpha$, де $\alpha \in [(2k-1)\pi;\ 2\pi k]$

$arctg(tg\,\alpha) = \alpha - \pi k$, де $\alpha \in (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$

$arcctg(ctg\,\alpha) = \alpha - \pi k$, де $\alpha \in (\pi k; (k+1)\pi)$

$\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \pi/2 - \arccos\alpha = arctg(\alpha/(1-\alpha^2)^{1/2})$

$\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \pi/2 - \arcsin\alpha = arcctg(\alpha/(1-\alpha^2)^{1/2})$

$arctg\,\alpha = -arctg(-\alpha) = \pi/2 - arcctg\,\alpha = \arcsin(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$arcctg\,\alpha = \pi - arcctg(-\alpha) = \arccos(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$arctg\,\alpha = arcctg\,1/\alpha = \arcsin(\alpha/(1+\alpha^2)^{1/2}) = \arccos(1/(1+\alpha^2)^{1/2})$

$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$

$arcctg\,\alpha + arctg\,\alpha = \pi/2$

Алгебраїчні рівняння

Лінійне рівняння:

x – невідома ; a, b – сталі коефіцієнти,

$ax + b = 0$,

$x = -b/a$.

Квадратне рівняння:

$ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$.

Якщо $(b^2-4ac) < 0$, то дійсних коренів нема.

Простіша система двох лінійних рівнянь з двома невідомими x,y

Якщо, наприклад, є два рівняння:

$ax + by + c = 0$,

$dy + e = 0$,

де a,b,c,d,e – сталі коефіцієнти, то виконуємо наступне:

(1) $x = \dfrac{-(by+c)}{a}$

(2) $y = \dfrac{-e}{d}$

(3) $x = \dfrac{-\left(b\left(\dfrac{-e}{d}\right)+c\right)}{a}$

(4) $x = \dfrac{be-cd}{ad}$

Дробово-раціональні рівняння - це рівняння виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Розв'язування можливе з умови: $f(x) = 0$ та $g(x) \neq 0$.

Ірраціональними називають рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня, тобто рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.
Для розв'язування використовують метод піднесення до степеня n обох частин рівняння, що призводить до рівняння виду $f(x) = [g(x)]^n$.

Логарифмічними називають рівняння, які містять невідоме під знаком логарифма, тобто рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$, де $a>0$ та $a\neq 1$. Якщо $g(x) = b$, то розв'язування зводиться до розв'язування рівняння $f(x) = a^b$.

Показниковими називають рівняння, в яких невідоме входить до показників степенів при сталих основах, тобто рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a>0$, $a\neq 1$ та $b>0$, $b\neq 1$. Для розв'язування використовують логарифмування обох частин рівняння за однією основою, що призводить до рівняння виду $f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$.

Тригонометричні рівняння

Якщо $\sin x = m$, $|m| \le 1$, то $x = (-1)^k \arcsin m + \pi k$, де $k \in Z$.

Якщо $\cos x = m$, $|m| \le 1$, то $x = \pm \arccos m + 2\pi k$, де $k \in Z$.

Якщо $tg\, x = m$, то $x = arctg\, m + \pi k$.

Якщо $ctg\, x = m$, то $x = arcctg\, m + \pi k$.

Для розв'язання простіших тригонометричних рівнянь використовуйте таблицю значень тригонометричних функцій основних кутів. *Наприклад*, якщо є рівняння: $\sin x = \sqrt{3}/2$, то $x = (-1)^k \arcsin \sqrt{3}/2 + \pi k = (-1)^k \pi/3 + \pi k$, що при $k=0$ дає $x = \pi/3$.

Числовою функцією називається така відповідність, при якій кожному числу з множини *X* зіставляється єдине число з множини *R* дійсних чисел.

Множину X називають ***областю визначення функції***.

Нехай *f* - функція з областю визначення *X*. Тоді змінну *x*, що приймає значення з множини *X*, називають ***аргументом даної функції***. Безліч чисел виду *f(x)* для всіх *x* з *X* називають ***безліччю значень функції f***.

Задати функцію означає вказати, по-перше, числову безліч *X*, тобто область визначення функції, і, по-друге, правило, за яким кожному числу з безлічі *X* відповідає єдине дійсне число. Найчастіше функції задають за допомогою формул, що вказують, як за даним значенням аргументу знайти відповідне значення функції.

Графіком функції *f* заданої на множині *X*, називають безліч таких точок координатної площини, які мають абсцис *x* і ординаті *f(x)* для всіх *x* з безлічі *X*. Щоб побудувати графік функції, треба скласти таблицю деяких відповідних значень *x* і *y*, зобразити кожну пару знайдених значень точкою на координатної площини і поєднати отримані точки плавною лінією.

Перетворення графіків функцій

Правило 1. Графік функції $y = f(x) + n$ можна побудувати паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ уздовж осі *Oy* на *n* одиниць угору, якщо $n > 0$, або на $|n|$ вниз, якщо $n<0$.

Правило 2. Графік функції $y = f(x + m)$ можна побудувати паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ уздовж осі *Ox* на *m* одиниць уліво, якщо $m > 0$, або на $|m|$ вправо, якщо $m < 0$.

Правило 3. Графік функції $y = kf(x)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$ розтяганням його по осі ординат у $|k|$ разів, якщо $|k|>1$, або стисканням у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0<|k|<1$. Якщо $k<0$, то після розтягання його треба відобразити симетрично щодо осі *Ox*.

Правило 4. Графік функції $y = f(cx)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$ стисканням його по осі абсцис у $|c|$ разів, якщо $|c|>1$, або розтяганням у $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0<|c|<1$. Якщо $c < 0$, то після стискання с його треба відобразити симетрично щодо осі *Oy*.

Правило 5. Графік функції $y = |f(x)|$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$, якщо ту частину графіка, що розміщується нижче від осі *Ox* відобразити симетрично відносно осі *Ox*. Та частина графіка, що розміщується вище від осі *Ox* або на ній, залишається без змін.

Правило 6. Графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати з графіка $y = f(x)$, якщо ту частину графіка, що розміщується ліворуч від осі *Oy* забрати, а ту частину графіка, що розміщується праворуч від осі *Oy* або на ній, залишити без змін й відобразити її симетрично відносно осі *Oy*.

Арифметичною прогресією називається послідовність чисел, у якій заданий перший член a_1, а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного і того самого числа *d*, що називається *різницею прогресії* $d = a_{n+1} - a_n$, де n – номер члена в послідовності.

Значення n-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сума n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_a = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}.$$

Геометричною прогресією називається послідовність чисел, у якій заданий перший член $b \ne 0$, а кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне і те саме число *q*, що називається *знаменником прогресії*, при цьому $q \ne 0$, $q \ne 1$. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, де *n* – номер члена в послідовності.

Значення n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ЕЛЕМЕТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Завдання №1

Обчислити: $5^{-3} \cdot 25^2 + (0,7)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Розв'язання:

$$5^{-3} \cdot 25^2 + (0,7)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{5^3} \cdot (5^2)^2 + 1 \cdot \frac{1}{2^{-2}} = \frac{5^4}{5^3} + 1 \cdot 2^2 = 5 + 4 = 9$$

Відповідь: 9.

Завдання №2

Скоротити дріб: $\frac{(2\boldsymbol{a}-6)\cdot(\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}+9)}{(\boldsymbol{a}^2-9)\cdot(\boldsymbol{a}+3)}$

Розв'язання:

$$\frac{(2\boldsymbol{a}-6)\cdot(\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}+9)}{(\boldsymbol{a}^2-9)\cdot(\boldsymbol{a}+3)} = \frac{2\cdot(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2}{(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)} = \frac{2\cdot(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2}{(\boldsymbol{a}-3)\cdot(\boldsymbol{a}+3)^2} = 2$$

Відповідь: 2.

Завдання №3

Знайти суму трьох чисел, якщо відомо, що третє відноситься до першого як $\frac{4,5}{3,75}$ і становить 40% від другого, а сума першого та другого дорівнює 400.

Розв'язання:

Позначимо: x - перше число, y - друге число, z - третє число.

З умови задачі, складемо систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} = 0,4\boldsymbol{y} \\ \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}} = \frac{4,5}{3,75} \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 400 \end{cases}$$

Підставляємо z з першого рівняння у друге:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ \dfrac{0{,}4y}{x} = \dfrac{4{,}5}{3{,}75} \\ x + y = 400 \end{cases}$$

До другого рівняння застосовуємо основне правило пропорції:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ 0{,}4y \cdot 3{,}75 = 4{,}5 \cdot x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

та виконуємо перетворення:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ y = 3x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом підстановки:

$$\begin{cases} z = 0{,}4y \\ y = 3x \\ x + 3x = 400 \end{cases}$$

З третього рівняння отримуємо $x = 100$. Тоді $y = 300$, а $z = 0{,}4 \cdot 300 = 120$. Разом числа складають 100+300+120=520.

Відповідь: 520.

Завдання №4

Розв'язати рівняння $\dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{7-2x}{2x+2}$

Розв'язання:

Область допустимих значень: $\begin{cases} 2x - 2 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 2x + 2 \neq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{7-2x}{2x+2} = 0$$

Приводимо до спільного знаменника та отримаємо:

$$\frac{x^2 - 9x + 8}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = 0$$

Звідки $\qquad x^2 - 9x + 8 = 0$.

Дискримінант квадратного рівняння:

$$D = 81 - 32 = 49$$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{49}}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{9 + \sqrt{49}}{2} = 8$$

Відповідь: 8.

Завдання №5

Сума трьох чисел, що складають арифметичну прогресію, дорівнює 111. Друге число більше першого в 5 разів. Знайти перше число.

Розв'язання:

Нехай a_1 - перше число, a_2 - друге число, a_3 - третє число. Використовуючи загальну формулу члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$, де d - різність прогресії, та умову задачі, отримуємо систему:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 111 \\ (a_1 + d) = 5a_1 \end{cases}$$

Після перетворення отримуємо систему:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 111 \\ d = 4a_1 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему та знаходимо: $a_1 = 7{,}4$.

Відповідь: 7,4.

Завдання №6

Розв'язати рівняння $\qquad \sqrt{1 + x \cdot \sqrt{x^2 - 24}} = x - 1$

Розв'язання:

Нехай $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

Підводимо обидві частини рівняння у другий ступінь, отримуємо рівняння, що рівносильне першому:

$$1 + x \cdot \sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x + 1$$

або $\qquad x \cdot \sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x$

Оскільки з попереднього аналізу $x \neq 0$, ділимо обидві частини рівняння на x:

$$\sqrt{x^2 - 24} = x - 2 .$$

Нехай $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2$.

Підводимо обидві частина рівняння у другий ступінь, отримуємо рівняння, що рівносильне попередньому:

$$x^2 - 24 = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow 4x = 28$$

Звідки $x = 7$.

Робимо перевірку чи відповідає цей розв'язок умові задачі.

Відповідь: 7.

Завдання №7

Знайти $x + y$, якщо $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 8y = -15 \end{cases}$

Розв'язання:

Відніманням першого рівняння системи від другого, отримуємо рівняння:

$$11y = 22$$

Тоді $y = 2$, $x = 7 - 3y = 1$.

$$x + y = 3.$$

Відповідь: 3.

Завдання №8

Розв'язати рівняння $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt[4]{2^{x-2}}$

Розв'язання:

Область допустимих значень: x - довільне дійсне число.

Запишемо рівняння у вигляді :

$$\sqrt{2^3 \cdot 2^{x-2}} = \sqrt[4]{2^{x-2}}$$

Позначимо $2^{x-2} = y > 0$ (*),

отримаємо $\sqrt{2^3 \cdot y} = \sqrt[4]{y}$

Підведемо обидві частини рівняння в четвертий ступінь:

$$2^6 \cdot y^2 = y$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$2^6 \cdot y^2 - y = 0,$$

$$y(2^6 \cdot y - 1) = 0$$

1) $y = 0$ не задовольняє умові (*).

2) $$2^6 \cdot y - 1 = 0$$

$$y = 2^{-6}$$

$$2^{x-2} = 2^{-6}$$

Прирівнюємо показники ступенів:

$$x - 2 = -6$$

$$x = -4$$

Відповідь: –4.

Завдання №9

Розв'язати рівняння $\lg x^2 - \lg\sqrt{x} = \lg 125$

Розв'язання:

Область допустимих значень: x > 0.

Використовуючи властивості логарифмів, отримуємо:

$$\lg \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lg 125$$

Потенциручи рівняння, отримуємо:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = 125 \quad \text{або} \quad x^{3/2} = 5^3$$

Підводимо обидві частини в третій ступень, звідки маємо

$x^{1/2} = 5$, та $x = 25$

Відповідь: 25.

Завдання №10

Знайти $6\sqrt{5}\sin\alpha$, якщо $tg\alpha = 0{,}5$ і $0° < \alpha < 90°$.

Розв'язання:

$$\sin\alpha > 0, \quad \text{оскільки} \quad 0° < \alpha < 90°.$$

Скористуємося формулами:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha \quad \text{та} \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Отримуємо:

$$\sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Тоді $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{1{,}25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Відповідно

$$6\sqrt{5}\,\mathbf{sin}\,\alpha = 6\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 6$$

Відповідь: 6.

Завдання №11

Знайти в градусах розв'язок рівняння

$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°)\,\mathbf{cos}(2\boldsymbol{x}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°)$, якщо $200° < \boldsymbol{x} < 300°$.

Розв'язання:

Запишемо рівняння у вигляді

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°)\,\mathbf{cos}(2\boldsymbol{x}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°) = 0$$

або $\mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°)(\mathbf{cos}(2\boldsymbol{x}) - 1) = 0$

Тоді

1) $\mathbf{sin}(\boldsymbol{x} - 30°) = 0$

$\boldsymbol{x} - 30° = 180°\cdot\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n} \in Z$

$\boldsymbol{x} = 30° + 180°\cdot\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n} \in Z$

2) $\mathbf{cos}(2\boldsymbol{x}) = 1$

$2\boldsymbol{x} = 360°\cdot\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k} \in Z$

$\boldsymbol{x} = 180°\cdot\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k} \in Z$

Таким чином, маємо розв'язок

$\boldsymbol{x} = 30° + 180°\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x} = 180°\cdot\boldsymbol{k}$,

де $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

або в числах $\boldsymbol{x} = 0°, 30°, 180°, 210°, 360°, 390° \ldots$

та $\boldsymbol{x} = -150°, -180° \ldots$

Умові задачі задовольняє лише $\boldsymbol{x} = 210°$.

Відповідь: $210°$.

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Медична і біологічна фізика / За ред. О.В. Чалого, 2-е видання – К.: Книга-плюс, 2005.
2. Медична і біологічна фізика / За ред. О.В. Чалого. Т. 1 – К.: Віпол, 1999; Т. 2 – К.: Віпол, 2001.
3. Свердан П.Л. Вища математика: Аналіз інформації у математиці та медицині. – Львів: Світ, 1998.
4. Чалий О.В., Стучинська Н.В., Меленевська А.В. Вища математика. – К.: Техніка, 2001.